الدارة الكهربائية RLC في نظام جيبي و قسري

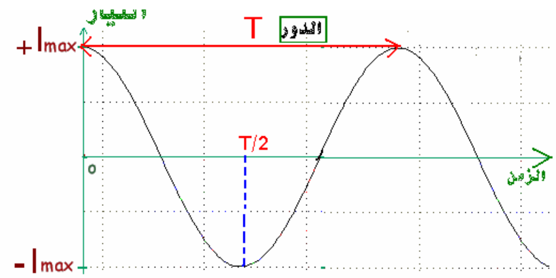
تنتج التيارات الكهربائية المتناوبة اعتمادا على آلات تحول حركة الدوران إلى طاقة كهربائية سهلة النقل وفق شروط اقتصادية مرضية مما يجعلها ذات نجاح عملي باهر .

بالنسبة لثنائي القطب RLC يبين هذا الفصل مدى الاستجابة التي يبديها RLC عندما نجبره على نظام جيبي ومتناوب

رأينا في دروس الكهرباء السابقة أن الدارة LC تنتج تذبذبات كهربائية بنبض خاص ω_0 .وسنرى خلال هذا الدرس ماذا يحدث عندما نفرض بين مربطي (RLC) توترا متناوبا و جيبيا تردد مختلف عن تردده الخاص N_0 . نقول أن الأمر يتعلق بنظام قسري : إنها التذبذبات القسرية

I) عموميات حول المقادير المتناوبة الجيبية

1.1) شدة التيار الكهربائي المتناوب الجيبي



تعريف :

التيار الكهربائي المتناوب الجيبي تيار

شدته دالة جيبية للزمن :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_1)$$

I_m : الشدة القصوية للتيار

ω : نبض التيار $i(t)$

$(\omega t + \varphi_1)$ طورشدة التيار الكهربائي $i(t)$

(Hz)

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N}$$

$(\mathrm{rad.s^{-1}})$

(s)

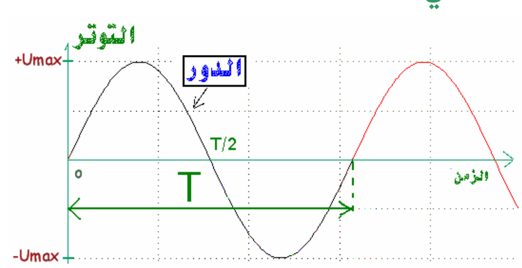
φ_1 : الطور عند أصل التواريخ

الشدة الفعالة I لشدة التيار الكهربائي

تقاس الشدة الفعالة بجهاز الأمبيرمتر(تستنتج القيمة القصوية انطلاقا من راسم التذبذب)

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

2.1) التوتر الكهربائي المتناوب الجيبي



التوتر الكهربائي $$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_2)$$

φ_2 : الطور عند أصل التواريخ ل $u(t)$

التوتر الفعال : U (يقاس باستعمال جهاز الفولطمتر بينما القيمة القصوية تقاس بواسطة راسم التذبذب)

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

3.1) طور التوتر بالنسبة للتيار

نسمي φ طور التوتر u(t) بالنسبة للتيار i(t) وهو مقدار جبري يعبر عنه بالراديان (rad)

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

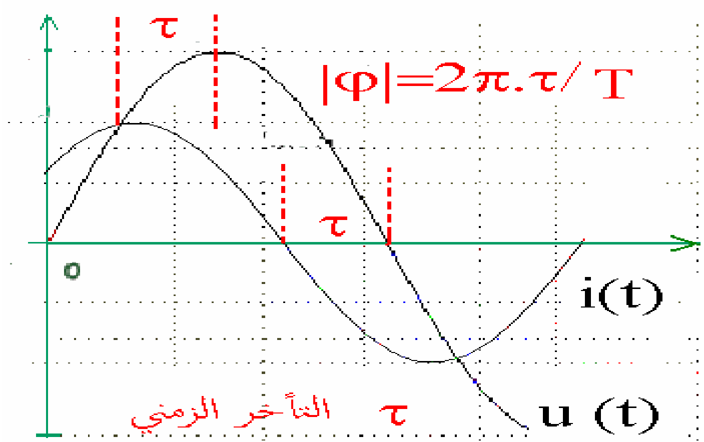
تمكن φ من قياس التقدم أو التأخر للتوتر u(t) بالنسبة ل i (t)

- ✓ إذا كانت $\varphi\rangle 0$ فإن التوتر u(t) متقدم في الطور عن شدة التيار الكهربائي i(t)
- ✓ إذا كانت $\varphi\langle 0$ فإن التوتر u(t) متأخر في الطور عن شدة التيار الكهربائي i(t)
- ✓ إذا كانت $\varphi = 0$ فإن التوتر u(t) و شدة التيار الكهربائي i(t) على توافق في الطور

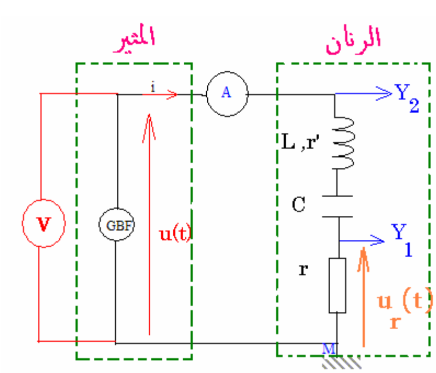
4.1) تحديد فرق الطور φ

يوافق فرق الطور بين منحنيي u(t) و i(t) فرق زمني τ بين المنحنيين ، قياسه من على شاشة راسم التذبذب يمكن من حساب القيمة الجبرية ل φ.

$$|\varphi| = \omega.\tau = \frac{2\pi.\tau}{T}$$



II) دراسة دارة RLC متوالية في نظام جيبي وقسري

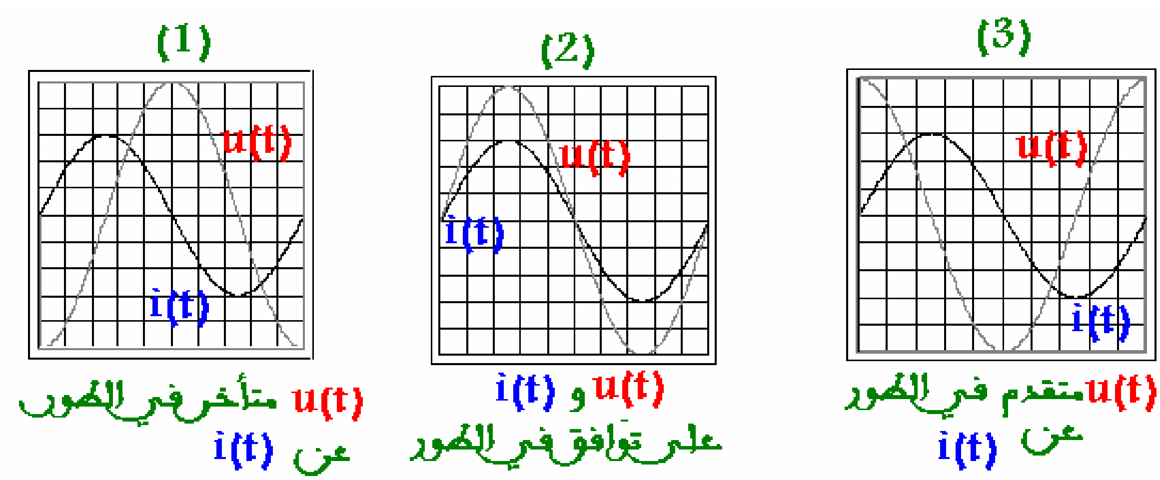


1.2) التركيب التجريبي :

تهدف الدراسة إلى معرفة مدى استجابة ثنائي القطب RLC

(الرنان) للمثير (GBF) نتتبع هذه الإستجابة عن طريق شدة التيار الكهربائي المار في الدارة ، بتغيير تردد GBF الذي يزود الدارة بتوترمتناوب

وجيبي تردده قابل للتغيير بواسطة راسم التذبذب يمكن معاينة المنحنيات التالية :



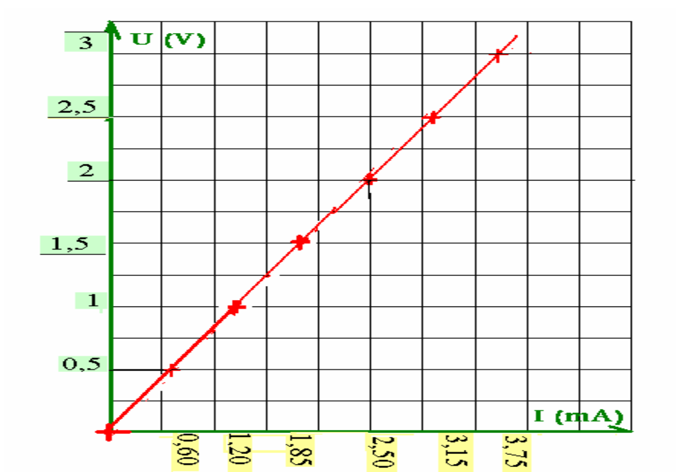
2.2) مفهوم الممانعة : Z

- جدول القياسات

نبقي التردد ثابتا ونغير التوتر الفعال U ونقيس شدة التيار الفعالة I ونحصل على النتائج المدونة في الجدول التالي :

3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	(V) U
3,75	3,15	2,50	1,85	1,20	0,60	0	I (mA)

- خط المميزة $U = f(I)$



المنحنى الممثل لتغيرات U بدلالة I عبارة عن مستقيم يمر من أصل المعلم معادلته :

$$U = Z.I$$

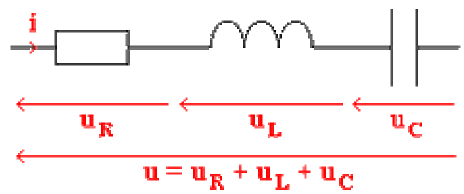
المعامل الموجه للمستقيم Z يمثل ممانعة الدارة ، يعبر عنها في النظام العالمي للوحدات ب Ω

ملحوظة : كلما ازداد التردد ازداد المعامل الموجه للمستقيم (ازدياد الممانعة)

III) الدراسة النظرية للدارة RLC المتوالية

1.3) المعادلة التفاضلية :

التوتر	ثنائي القطب
$V(t)= R\,i(t)$	i(t) R ←V(t)—
$V(t)= L\dfrac{di(t)}{d(t)}$	i(t) L ←V(t)—
$V(t)= \dfrac{1}{C}\int i(t)dt$	i(t) C ←V(t)—



حسب قانون تجميع التوترات :

$$U(t) = Ri(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

نعتبر أن شدة التيار المار في الدارة $i(t) = I_m \cos \omega t$ وأن التوتر بين طرفي ثنائي القطب RLC

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- $U_R(t) = R.i(t) = RI_m \cos \omega t$
- $U_C(t) = +\dfrac{I_m}{C\omega}\sin \omega t = \dfrac{I_m}{C\omega}\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2})$
- $U_L = -L\omega I_m \sin \omega t = L\omega I_m \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2})$

إذن :

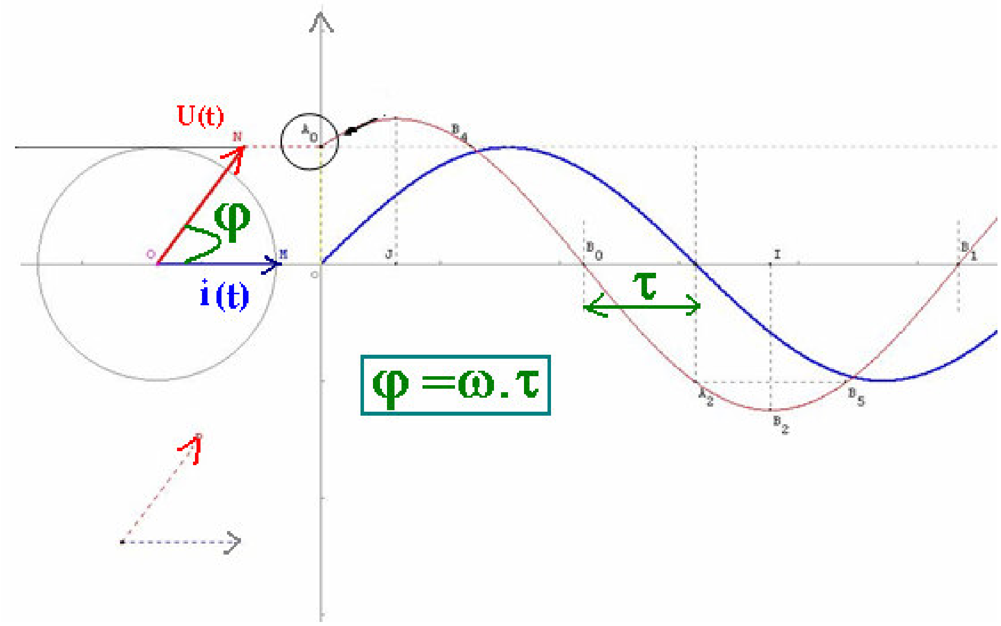
$$U(t) = RI_m \cos \omega t + \frac{I_m}{C\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) + L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$
$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

2.3) حل المعادلة التفاضلية

- متجهة فرينيل : نقرن بكل متجهة $\overrightarrow{OM}$ دوارة بسرعة زاوية ثابتة ω دالة جيبية

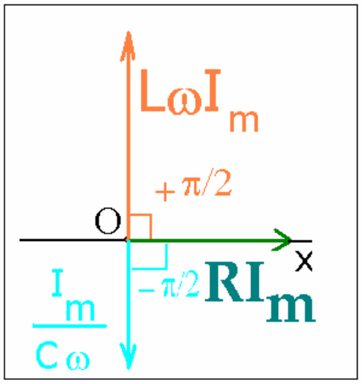
$Y = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ تمثل عند اللحظة $t = 0$

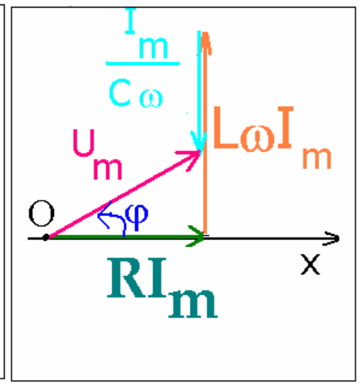
الدالة الجيبية	المتجهة
وسع الدالة : X_m	منظم المتجهة a
φ الطور عند t = 0	φ الأفصول الزاوي عند t = 0



➢ حل المعادلة التفاضلية لثنائي القطب RLC المتوالي

المقدار الجيبي	الطور عند أصل التواريخ	الممانعة = منظم المتجهة	ثنائي القطب
$U_R(t) = RI_m \cos \omega t$	0	RI_m	الموصل الأومي
$U_C(t) = \frac{I_m}{C\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$-\pi/2$	$\frac{I_m}{C\omega}$	المكثف
$U_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$+\pi/2$	$L\omega I_m$	الوشيعة





استنتاج :

 U_m من المثلث القائم الزاوية : $U_m^{\,2}=\left(RI_m\right)^2+\left(L\omega I_m-\dfrac{I_m}{C.\omega}\right)^2$ ومنه نستنتج الممانعة

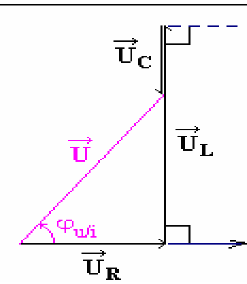
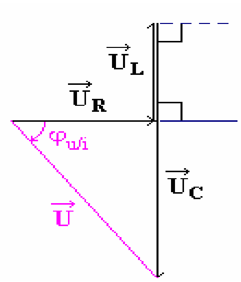
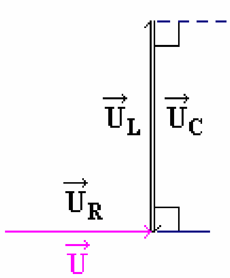
 الممانعة: $U_m = Z.I_m$ ومنه $Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$

 فرق الطور:

$$\tan\varphi=\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

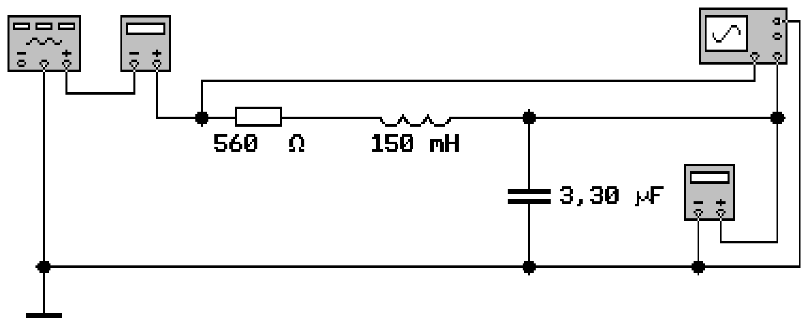
$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

3.3) دراسة الحالات :

$L\omega > \dfrac{1}{C\omega}$ و φ موجبة	$L\omega < \dfrac{1}{C\omega}$ و φ سالبة	$L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ و φ
 التأثير التحريضي متفوق على التأثير الكثافي	 التأثير الكثافي متفوق على التأثير التحريضي	 التأثير الكثافي مساوي للتأثير التحريضي

IV) ظاهرة الرنين الكهربائي

1.4) الدراسة التجريبية:



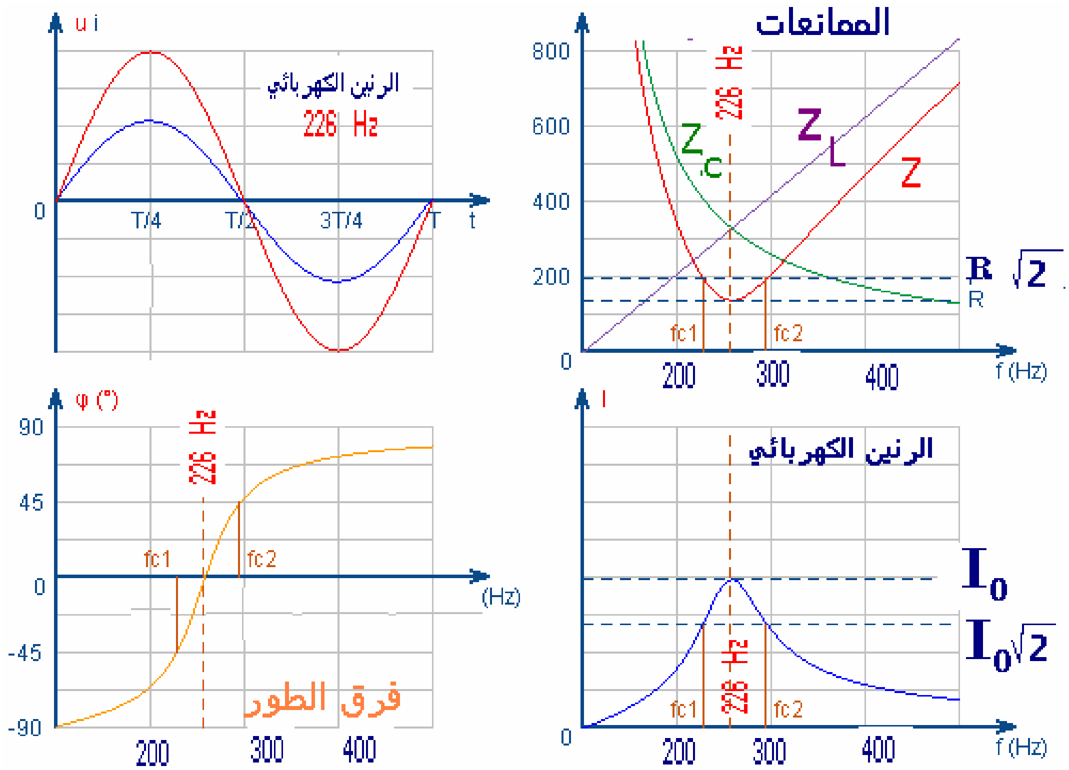
2.4) القياسات:

$$Z = \frac{U}{I} \qquad R = \frac{U_R}{I} \qquad Z_C = \frac{U_C}{I} \qquad Z_L = \frac{U_L}{I}$$

N [Hz]	i [mA]	Z [Ω]	U_R [V]	R [Ω]	U_L [V]	Z_L [Ω]	U_C [V]	Z_C [Ω]
50	9.3	1074.86	5.21	560	0.44	47.12	8.97	964.58
100	14.68	681.30	8.22	560	1.38	94.25	7.08	482.29
200	17.78	562.47	9.96	560	3.35	188.50	4.29	241.14
226	17.86	560.00	9.99	560	3.80	213.40	3.81	213.40
300	17.45	573.13	9.77	560	4.93	282.74	2.81	160.76
400	16.24	615.91	9.09	560	6.12	376.99	1.96	120.57
500	14.84	673.84	8.31	560	9.99	471.24	1.43	96.46
600	13.50	740.89	7.56	560	7.63	565.49	1.09	80.38
700	12.28	814.06	6.88	560	8.10	659.73	0.85	68.90
800	11.22	891.52	6.28	560	8.46	753.98	0.68	60.29
900	10.29	972.14	5.76	560	8.73	848.23	0.55	53.59
1000	9.48	1055.12	5.31	560	8.93	942.48	0.46	48.23
2000	5.15	1943.28	2.88	560	9.70	1884.96	0.12	24.11
3000	3.49	2866.59	1.95	560	9.86	2827.43	0.06	16.08
4000	2.63	3799.35	1.47	560	9.92	3769.91	0.03	12.06
5000	2.11	4735.97	1.18	560	9.95	4712.39	0.02	9.65

3.4)التمثيل المبياني

1. $i(t) = f\,(N)$



4.4) التعليل :

تتميز حالة الرنين باستجابة قصوية للدارة ونقول :

❖ تحدث ظاهرة الرنين الكهربائي ، عندما يكون تردد التوتر المطبق مساويا للتردد الخاص N_0

$$N_0 = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{150\cdot10^{-3}\cdot3.3\cdot10^{-6}}} = 226.21\ [Hz]$$

❖ عند الرنين تكون ممانعة الدارة دنوية وتساوي مقاومتها R

❖ عند الرنين تأخذ شدة التيار الكهربائي قيمة قصوية : $I_0 = U/R$

❖ عند الرنين يكون التوتر اللحظي المطبقة بين مربطي الدارةRLC و الشدة اللحظية على توافق في الطور

5.4) المنطقة المررة

❖ تعريف :المنطقة المررة ذات 3dB- لدارة RLC هي مجال الترددات $[N_1, N_2]$ للمولد حيث

تكون الإستجابة I أكبر أو على الأقل تساوي $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ (I_0 هي الشدة الفعالة للتيار عند الرنين)

ملحوظة : في الحقيقة تحدد المنطقة المررة انطلاقا من : $20.\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right)=-3$

❖ تحديد المنطقة المررة

هي المجال الذي تحصره القيمتين ω_2 ; ω_1 حيث تتحقق $I \rangle \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

$$Z(\omega)=\sqrt{2}.R \quad \Rightarrow R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2=2R^2 \Rightarrow \left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2=R^2$$

المعادلة لها أربعة حلول :

$$\omega_1=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2} \qquad \omega_3=-\frac{R}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2} \ \Rightarrow\ \omega_3<0$$

$$\omega_2=+\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2} \qquad \omega_4=-\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2} \ \Rightarrow\ \omega_4<0$$

انطلاقا من تعبير ω_2,ω_1 نستنتج :

$$\boxed{\omega_2-\omega_1=\frac{R}{L}\Rightarrow \Delta N=\frac{R}{2\pi L}} \quad \text{و} \quad \boxed{\omega_1.\omega_2=\omega_0^2}$$

يتناسب عرض المنطقة المررة مع المقاومة الكلية للدارة R ، كلما كانت R صغيرة كلنا كان الرنين حادا ويكون العرض ΔN صغيرا وبالتالي تكون الدارة انتقائية .

6.4) معامل الجودة Q

$$Q=\frac{\omega_0}{\omega_2-\omega_1}$$

ومما سبق :

$$\boxed{Q=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{1}{RC\omega_0}=\frac{1}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

ملحوظة : الرنين بين طرفي المكثف :

نعلم أن:

$$u_c=\frac{I}{C\omega}. \Rightarrow u_c=\frac{1}{C\omega}.\frac{u}{Z}$$

$$\Rightarrow\ U_{c0}=\frac{U_0}{\sqrt{R^2C^2\omega^2+\left(LC\omega^2-1\right)^2}}$$

هذا التوتر يكون قصويا عند ω_C وهو نبض مخالف ل ω_0 النبض عند الرنين(يوافق قيمة دنوية للمقام) ومنه نستنتج :

$$\omega_c^2=\omega_0^2-\frac{R^2}{2L^2} \quad \Rightarrow \boxed{\omega_c^2=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)}$$

من العلاقة السابقة ω_C موجبة نستنتج أن الرنين لا يمكن أن يحدث إلا $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ (من العلاقة السابقة)

ومن تم يصبح التوتر بين طرفي المكثف: $U_{cmax} = \frac{QU_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ وبالنسبة لQ كبيرا يصبح التوتر القصوي بين طرفي المكثف أو الوشيعة : $U_{c\,max} = U_{L\,max} \approx Q.U_0$ لذلك نسمي Q بمعامل فرط التوتر

V) القدرة في النظام المتناوب الجيبي

1.5) القدرة اللحظية :

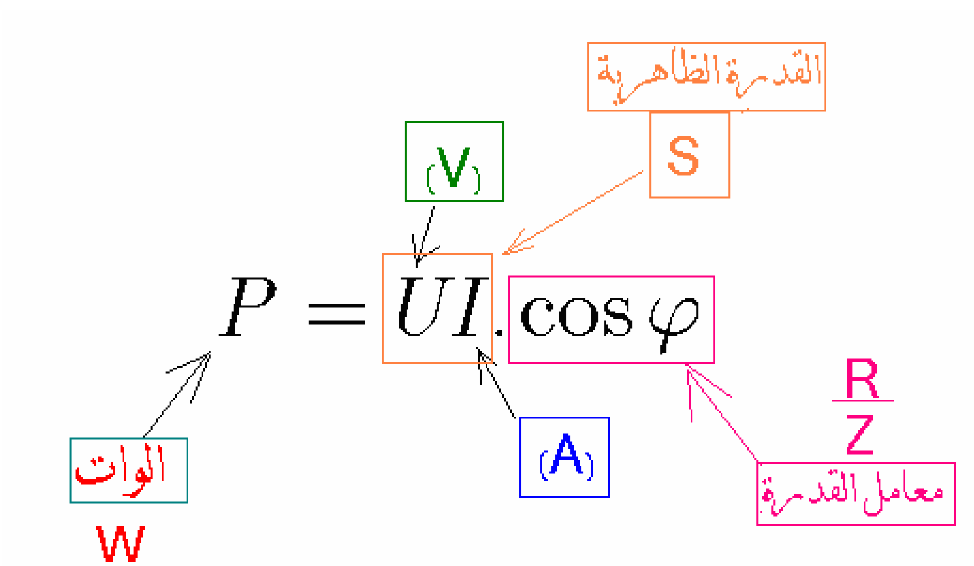
$$P(t) = u(t).i(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi).I\sqrt{2}\cos\omega t$$
$$P(t) = UI\left[\cos\varphi + \cos\left(2\omega t+\varphi\right)\right]$$

يلاحظ أن القدرة دالة جيبية نبضها 2ω ودورها $T/2$

2.5) القدرة المتوسطة

القدرة المتوسطة أو القدرة النشيطة هي مجموع القدرات اللحظية المستهلكة من طرف ثنائي القطب خلال دور واحد

$$P = UI.\cos\varphi$$



بتعويض تعبير $\cos\varphi$ نجد أن القدرة الكهربائية المتوسطة في دارة RLC المتوالية لا تستهلك إلا من طرف المقاومة R

على شكل حرارة (مفعول جول) حيث $P = RI^2$